Exercices de révision : Matrices

8 décembre 2018

1 Généralités algébriques

THEME : La structure d'anneau

1.1

Déterminer le centre de $M_n(\mathbf{K})$.

1.2

(Simplicité de $M_n(\mathbf{K})$) Montrer que si I est un idéal bilatère de $M_n(\mathbf{K})$, alors $I = \{0_n\}$ ou $I = M_n(\mathbf{K})$.

1.3

Soit $\varphi\colon M_n(\mathbf{K}) \longrightarrow M_n(\mathbf{K})$ un morphisme d'algèbre. Montrer que si $\varphi \neq 0$, alors φ est un automorphisme.

1.4

Soit $\varphi\colon M_n(\mathbf{K}) \longrightarrow M_n(\mathbf{K})$ un morphisme d'anneau. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme et qu'il est linéaire lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

1.5

A quelle condition sur $\mathbf{K}$ peut-on assurer que toute matrice carrée est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ?

1.6

Quelle est la dimension maximum d'un sev de $M_n(\mathbf{R})$ ne contenant aucune matrice antisymétrique non nulle ?

THEME : matrices triangulaires

1.7

Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaires supérieur, que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieur inversible est triangulaire supérieur, et qu'une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle est nilpotente.

THEME : action polynomiale

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $M_n(\mathbb{K})$ qui à P attache $P(A)$ est un morphisme d'algèbre respectant la conjugaison. Une matrice A possède un unique polynôme minimal (normalisé) qui divise tous ses polynômes annulateurs.

1.8

Soit A la matrice triangulaire supérieure composée de 1. Calculer A^p pour p entier négatif, puis pour p entier naturel.

Rmq De manière générale, pour un cacul de puissance d'une matrice A, on calcule le polynôme minimal μ_A de A, on effectue la division euclidienne de X^p par μ_A :

$$X^p = Q(X)\mu_A(X) + R_p(X)$$

Puis on applique à A :

$$A^p = R_p(A)$$

2 Changement de bases

2.1

Donner la matrice correspondant à deux changement de bases consécutifs.

3 Matrices et applications linéaires

3.1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalente 1) A est inversible 2) A est inversible à gauche 3) A est régulier à gauche 4) A est inversible à droite 5) A est régulier à droite 6) A n'est pas diviseur de 0 à gauche 7) A n'est pas diviseur de 0 à droite.

Cours : soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe des matrices inversibles P et Q de tailles respectives m et n telles que $PAQ = J$ où J est une matrice ayant r coefficients 1 dans la diagonale et dont les autres termes sont nuls.

3.2

soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, montrer que le rang des lignes de A est égal à celui des colonnes de A.

3.3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer :

$$A + B = AB \implies B + A = BA$$

3.4

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ tel que $v \circ u$ est un projecteur.

3.5

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. Montrer que :

$$\mathrm{rg} u < n \iff \exists v \text{ nilpotent}, \exists \alpha, \beta \in \mathcal{GL}(\mathcal{E}),\ u = \alpha \circ v \circ \beta$$

3.6

Soit $N_1, \dots, N_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux. Montrer que $N_1 N_2 \cdots N_n = 0$.

4 Déterminant

4.1

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow R$ non-constante telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que $f(I_n) = 1$, $f(0_n) = 0$ puis :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ inversible} \iff f(A) \neq 0$$

4.2

(Déterminant de Cauchy) Montrer que si $(a_i)_{i=1}^n, (b_j)j = 1^n$ sont deux familles de réels non-nuls alors :

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n}(a_i + b_j)}$$

4.3

(Déterminant de Hurwitz) On pose

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & b & b & \cdots & \cdots & b \\ a & x_2 & b & \cdots & \cdots & b \\ \\ . & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & b \\ a & \cdots & \cdots & \cdots & a & x_n \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A$.

4.4

Soit $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$. Montrer que $GL_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

4.5

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Montrer, lorsque $[C, D] = 0$:

$$\det M = \det(AD - BC)$$

4.6

On admet que pour $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$:

N nilpotente $\Longrightarrow$ N est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2$ avec $[A, B] = 0$. Montrer que :

$$B \text{ nilpotente} \Longrightarrow \det(A + B) = \det A$$

4.7

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $\mathrm{rg} B = 1$. Montrer que $\det(A + B)\det(A - B) \leq \det A^2$.

5 La trace

5.1

(La trace est intrinsèque) Soit $\varphi \in E^*$. Soit $a \in E$. On définit u par :

$$u \colon x \in E \longmapsto \varphi(x)a \in E$$

Quelle est la trace de u ?

5.2

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ telle que $p^2 = p$. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg} p$.

5.3

(i) Soit $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^*$. Montrer :

$$\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$$

(ii) Caractériser les $f \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^*$ tels que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2,\ f(AB) = f(BA)$$

(iii) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer :

$$H \cap GL_n(\mathbf{K}) \neq \emptyset$$

5.4

Soit $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$. Soit u une application linéaire sur E qui n'est pas une homothétie et telle que :

$$\mathrm{Tr}(u) = 0$$

Montrer qu'il existe une base (e) de E telle que :

$$[u]_{(e)}^{(c)} = \begin{pmatrix} 0 & & * & \\ 1 & a_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & * & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5.5

Soit $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$, montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

5.6 Théorème de Maschke

Soit $G = \{A_1 \ldots, A_p\}$ un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{C})$.
a) Montrer que $\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{p} A_i)$ est divisible par p.
b) Déterminer la dimension de l'espace des points fixes communs aux éléments de G.
c) Montrer que tout sev de $\mathbf{C}^n$ stable par G possède un supplémentaire stable par G.

5.7

Soient $(p_i)_{i=1}^{n}$ des projecteurs de E. On suppose :

$$p_1 + \cdots + p_n = Id_E$$

Montrer :

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Im}(p_i)$$

Puis que p_k est le projecteur sur $\mathrm{Im}p_k$ parallèlement à F_k où :

$$F_k = \bigoplus_{i \neq k} \mathrm{Im}(p_i)$$

6 Mineurs

6.1

Enoncer et démontrer la caractérisation du rang par les mineurs

6.2

Soient $\mathbf{L}$ un corps et $\mathbf{K}$ un surcorps de $\mathbf{L}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Montrer que le rang de A est le même dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{L})$.

6.3

Soient $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que le polyôme minimal de A est le même dans $\mathbf{K}$ et dans $\mathbf{C}$. Montrons d'abord le lemme suivant (cf. chapitre 24).

Lemme : le degré du polynôme minimal de A est le rang de $\left(A^k\right)_{k=0}^{n^2-1}$.

7 Comatrices

7.1.

(Comatrices) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on pose :

$$\widetilde{A} = \operatorname{com} A = (\operatorname{cof} A)^t$$

(i) Déterminer $\operatorname{rg}\widetilde{A}$ en fonction de $\operatorname{rg}A$.

(ii) Montrer :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2,\ \widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$$

(iii) On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

a. Trouver :

$$\{\widetilde{A} \mid A \in GL_n(\mathbf{C})\}$$

b. Trouver :

$$\{\widetilde{A} \mid A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})\}$$

8 Topologie et matrices

8.1

Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et tout $P \in GL_n(\mathbf{R})$, $N(P^{-1}MP) = N(M)$?

8.2

On suppose que la suite $(A_p) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ converge. que dire de sa limite ?

8.3

On suppose que la suite $(A_n) \in GL_n(\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ converge et que la suite $|\det(A_n)|$ est minorée par un nombre $a > 0$. Montrer que la limite est inversible.

8.4

Composition $\|\,\|_\infty \circ A$

(Calculs usuels) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K}$ est égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{K}$. On note aussi $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.

(i) Déterminer $\|A\|$ pour $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

(ii) Déterminer $\|A\|$ pour $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

8.5

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a facilement que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert en tant qu'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue det.
Il est de plus dense avec la suite $\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$. On peut également invoquer le fait que si ce n'était pas le cas, alors det s'annulerait sur un voisinage d'un point, et serait alors nul, comme tout polynôme à plusieurs indéterminées de la sorte, ce qui est absurde.

8.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si $\|A\| < 1$ alors $I_n - A$ est inversible.

8.7

On note, pour $r \in \{0; \cdots; \min(m,n)\}$:

$$X_r = \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} A \leq r\}$$

$$Y_r = \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} A = r\}$$

(i) Montrer que X_r est fermé.
(ii) Montrer que $\overline{Y_r} = X_r$.